

例題 197 期待値

1 から 9 までの数字の中から重複しないように 3 つの数字を無作為に選ぶ。その中の最大の数字を X とする。

- (1) $X=3$ となる確率を求めよ。
- (2) $X=4$ となる確率を求めよ。
- (3) 期待値を求めよ。

(鳥取大)

考え方

- (1) $X=3$ より, $\{1, 2, 3\}$ の 1 通り
- (2) $X=4$ より, $\{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}$ の 3 通り
3 つのうち 1 つは必ず 4 で, 残りの 2 つは 3 以下の 3 つから 2 つ選ぶと考える。

解答

9 つの数字から 3 つを選ぶ方法は,

$${}_9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ (通り)}$$

- (1) $X=3$ より, $\{1, 2, 3\}$ の 1 通り

よって, 求める確率は, $\frac{1}{84}$

- (2) $X=4$ より, 4 と 3 以下の数字を 2 つ選べばよい。

$$1 \times {}_3C_2 = 3 \text{ (通り)}$$

よって, 求める確率は, $\frac{3}{84} = \frac{1}{28}$

- (3) $X=5$ から $X=9$ までの確率も求めると, 次の表のようになる。

X	3	4	5	6	7	8	9	計
p	$\frac{1}{84}$	$\frac{3}{84}$	$\frac{6}{84}$	$\frac{10}{84}$	$\frac{15}{84}$	$\frac{21}{84}$	$\frac{28}{84}$	1

よって, 求める期待値は,

$$\begin{aligned}
 & 3 \times \frac{1}{84} + 4 \times \frac{3}{84} + 5 \times \frac{6}{84} + 6 \times \frac{10}{84} + 7 \times \frac{15}{84} \\
 & \quad + 8 \times \frac{21}{84} + 9 \times \frac{28}{84} \\
 & = \frac{15}{2}
 \end{aligned}$$

◀ $X=1, 2$ はない。

◀ $X=5$ のとき, 5 と 4 以下の数字を 2 つ選ぶから, $1 \times {}_4C_2$

同様に考えて,

$$X=6: 1 \times {}_5C_2$$

$$X=7: 1 \times {}_6C_2$$

$$X=8: 1 \times {}_7C_2$$

$$X=9: 1 \times {}_8C_2$$

◀ 計算しやすいように約分せずにそのままにしておく。

◀ 計が 1 になるか確認する。

Focus

期待値を求めるには, すべての場合の確率を求める

練習

197

2 個のさいころを同時に投げるとき, 出る目の数の和の期待値を求めよ。

→ p. 393 ⑤

Think

例 題 198 有利・不利の問題

1 から 6 までの番号札がそれぞれの番号の数だけ用意されている。この中から 1 枚取り出すとき、次の①、②のどちらが有利であるか。

- ① 出た番号と同じ枚数の 100 円硬貨をもらう。
 ② 偶数の番号が出たときだけ一律に 700 円をもらう。 (愛媛大)

考え方 ①、②それぞれのもらえる金額の期待値を比較して、値の大きい方(たくさんもらえる方)が有利である。番号札の枚数は、次のようになり、合計 21 枚である。

①…1 枚, ②…2 枚, ③…3 枚, ④…4 枚, ⑤…5 枚, ⑥…6 枚

解答 番号札の合計枚数は 21 枚である。もらえる金額を X 円, その確率を p とすると, X に対する確率 p は次の表のようになる。

①

X	100	200	300	400	500	600	計
p	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$	1

したがって、もらえる金額の期待値は、

$$100 \times \frac{1}{21} + 200 \times \frac{2}{21} + 300 \times \frac{3}{21} + 400 \times \frac{4}{21} + 500 \times \frac{5}{21} + 600 \times \frac{6}{21} = \frac{1300}{3} \div 433 \text{ (円)}$$

②

X	0	700	計
p	$\frac{9}{21}$	$\frac{12}{21}$	1

したがって、もらえる金額の期待値は、

$$0 \times \frac{9}{21} + 700 \times \frac{12}{21} = 400 \text{ (円)}$$

よって、 $433 > 400$ より、①の方が有利であるといえる。

$$1+2+3+4+5+6=21$$

「もらえる金額の確率」
 =「それぞれの番号
 札を引く確率」

①の出る確率は、合計
 21 枚から 1 枚取り出
 すので、 $\frac{1}{21}$

①の期待値

偶数の番号札 12 枚,
 奇数の番号札 9 枚で、
 奇数が出たときは何も
 もらえない(つまり 0
 円である)。

②の期待値

(①の期待値)
 $>$ (②の期待値)

Focus

有利・不利の問題、損得の問題は期待値で判断する

練習

198

**

当たりくじ 3 本を含む 10 本のくじがある。この中から 3 本のくじを無作為に選んだときに当たったくじの本数と同じ枚数の 100 円硬貨をもらえるという。このくじ引きを 1 回行うために 100 円の参加料を払わなければならないが、このくじ引きに参加することは得であるといえるか。ただし、引いたくじは、もとに戻すものとする。